

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est dit **normalisé** si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1. Si m est un entier naturel, $\mathbb{R}_m[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les monômes $(X^k)_{0 \leq k \leq m}$.

Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ normalisé de degré 2, $A(X) = X^2 + pX + q$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A(x) > 0$ pour tout réel x . L'entier naturel n étant fixé, on lui associe l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad A(x)y'' - nA'(x)y' + n(n+1)y = 0.$$

Pour $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on pose $u(P) = AP'' - nA'P'$.

1°. (a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme u de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ dont on donnera la représentation matricielle dans la base des monômes $(X^k)_{0 \leq k \leq n+1}$. Préciser les éléments diagonaux que l'on notera $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ avec $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n = \lambda_{n+1}$.

(b) Démontrer que u est diagonalisable et donner la dimension de chacun des sous-espaces propres de u .

(c) Démontrer que pour tout entier naturel k , $0 \leq k \leq n+1$, il existe un polynôme P_k , normalisé et de degré k , tel que $u(P_k) = \lambda_k P_k$. Discuter l'unicité de ces polynômes P_k .

(d) En déduire que toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation (E_n) sont des fonctions polynômes.

2°. Soit I un intervalle ouvert non vide tel que $P_n(x)$ soit différent de zéro pour tout x de I . On cherche à exprimer une fonction v , solution de l'équation (E_n) , sous la forme $v = zP_n$

où z est une application définie sur I . Démontrer l'existence d'une telle fonction z de classe \mathcal{C}^2 et que z' est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

3°. Démontrer que la fraction rationnelle $\frac{A^n}{P_n^2}$ est la dérivée d'une fraction rationnelle que l'on précisera.

Exercice 2

Soit C l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, 2π -périodiques, paires, continues et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} .

À tout élément f de C , on associe l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - y = f(x).$$

1°. (a) Étudier existence et unicité d'une solution y_0 sur \mathbb{R} de (E) telle que $y_0(0) = 0$ et $y_0'(0) = 0$.

(b) Exprimer la solution générale sur \mathbb{R} de (E) à l'aide de $t, y_0, t \mapsto \operatorname{ch} t$ et $t \mapsto \operatorname{sh} t$.

2°. (a) Vérifier que $t \mapsto y_0(-t)$ définit une solution sur \mathbb{R} de (E) et en déduire que y_0 est paire.

(b) Quelles sont les solutions y sur \mathbb{R} de (E) telles que $y(\pi) = y(-\pi)$?

(c) Montrer que l'équation E admet une unique solution F telle que $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

(d) En étudiant l'application $t \mapsto F(t - 2\pi)$ démontrer que F est l'unique solution 2π -périodique sur \mathbb{R} de (E) et que cette solution est paire.

3°. (a) Vérifier que, pour tout réel x , $y_0(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) f(t) dt$ et en déduire une expression de F . (On pourra utiliser les égalités $\operatorname{sh}(x-t) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch}(x-t) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} t$.)

(b) Démontrer que, en posant $F = T(f)$ l'on définit ainsi un endomorphisme continu T de l'espace vectoriel C muni de la norme N_∞ de la convergence uniforme.

4°. (a) Démontrer que f et F admettent des développements en série de Fourier de la forme :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos nx$$

ces séries trigonométriques convergeant normalement sur \mathbb{R} .

(b) Exprimer les coefficients b_n en fonction des coefficients a_n .

5°. Dans cette question, on choisit $f(x) = |\sin x|$.

(a) Déterminer la restriction de F à l'intervalle $[0, \pi]$ à l'aide des fonctions \sin , ch et sh .

(b) Calculer les coefficients a_n , puis les coefficients b_n .

(c) Donner la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^4 - 1}$.

Exercice 3

On considère le plan affine euclidien E , rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le nombre réel a strictement positif est donné.

Soit h une application de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que $h(0) = 0$. On lui associe l'application M de \mathbb{R}^2 dans E définie par :

$$\overrightarrow{OM}(\theta, t) = [a(1 - \cos \theta) \sin(\theta - t) + h(t)] \vec{i} - [a(1 - \cos \theta) \cos(\theta - t)] \vec{j}.$$

Pour t réel, Ω_t désigne le point de E défini par la relation $\overrightarrow{O\Omega_t} = h(t) \vec{i}$ et γ_t désigne l'arc paramétré défini par l'application de \mathbb{R} dans E définie par $\theta \mapsto M(\theta, t)$.

Enfin Γ est l'arc paramétré défini par l'application de \mathbb{R} dans E définie par $t \mapsto P(t) = M(t, t)$.

1°. (a) Donner une équation polaire de γ_0 dans le repère $(O, -\vec{j})$. Dessiner le support de γ_0 .

(b) Plus généralement donner pour t réel une équation polaire de γ_t dans le repère $(\Omega_t, -\vec{j})$. Déterminer une isométrie transformant le support de γ_0 en celui de γ_t .

2°. (a) Déterminer l'application h de telle sorte que, pour tout réel α , on ait la relation :

$$\frac{d\vec{P}}{dt}(\alpha) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}(\alpha, \alpha).$$

Interpréter géométriquement cette égalité.

(b) Montrer que, dans ces conditions, si le point $Q(\alpha)$ de paramètre $\theta = \alpha$ de γ_0 est un point régulier, il en est de même pour le point $P(\alpha)$ de paramètre $t = \alpha$ de Γ . Comment déduire la tangente à Γ en P de la tangente en Q à γ_0 ?

Dans la suite, Γ désigne l'arc paramétré de E défini pour tout réel θ par :

$$\overrightarrow{OP(\theta)} = a(\theta - \sin \theta) \vec{i} - a(1 - \cos \theta) \vec{j}.$$

3°. (a) Soient respectivement σ et s des abscisses curvilignes sur γ_0 et Γ . Comparer $\frac{ds}{d\theta}$ et $\frac{d\sigma}{d\theta}$.

(b) Comparer et calculer la longueur des sous-arcs respectifs de γ_0 et de Γ définis par l'intervalle $[0, 2\pi]$.

(c) Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, déterminer le repère de Frenet $(P(\theta); \vec{T}, \vec{N})$ au point $P(\theta)$ de Γ . Calculer le rayon de courbure R en ce point.

(d) Soit $C(\theta)$ le point défini par la relation $\overrightarrow{P(\theta)C(\theta)} = R \vec{N}$. Calculer les coordonnées de $C(\theta)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(e) Soit Γ_1 le lieu des points $C(\theta)$. Par quelle transformation affine le support de Γ_1 se déduit-il de celui de Γ ?

4°. (a) Expliciter des transformations géométriques simples laissant globalement invariant le support de Γ .

(b) Montrer que le point $P(0)$ est un point singulier de Γ . Préciser l'existence d'une tangente et la nature de la singularité.

(c) Dessiner sur une même figure le support de γ_0 , le support du sous-arc de Γ défini par l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$, ainsi que le support de γ_θ , le point $P(\theta)$ et la tangente au point de contact pour les valeurs $\theta = \pi$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$.