

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E , de cardinal m , tel que F soit stable par tout élément g de G .

Le produit $u \circ v$ de deux endomorphismes de E sera noté plus simplement uv .

À tout endomorphisme u de E , on associe u^+ défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1}ug.$$

1°. Montrer que u^+ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément h de G .

2°. Calculer $(u^+)^+$.

3°. Calculer la trace de u^+ en fonction de celle de u .

4°. Soit p un projecteur de E d'image F . Montrer que F est inclus dans l'image de p^+ .

5°. Montrer que, pour tous g et h de G , on a $g^{-1}pgh^{-1}ph = h^{-1}ph$.

6°. Montrer que p^+ est un projecteur.

7°. Comparer les images de p et de p^+ .

8°. Montrer que le noyau de p^+ est un supplémentaire de F stable par tout élément g de G .

9°. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par tout g de G admet un supplémentaire stable par tout g de G .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 privée du couple $(0, 0)$ par la relation :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Soient u , v et ρ des nombres réels liés par les relations $0 < \rho = \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$.

1°. Démontrer les inégalités $|u + v| \leq \rho\sqrt{2}$ et $|u - v| \leq \rho\sqrt{2}$.

2°. Soit $D(u, v) = 2(u + 1)^2 + 2(v + 1)^2$. Démontrer l'inégalité $3D(u, v) > 1$.

3°. Soit, sous les mêmes conditions, $N(u, v) = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) + 4uv(u - v)$. Démontrer l'inégalité $|N(u, v)| \leq 2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4$.

4°. Soit, sous les mêmes conditions, $g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - (u - v) - \frac{2 - u^2}{2}$. Montrer que $\frac{|g(u, v)|}{\rho^3}$ est borné par une constante indépendante de ρ lorsque ρ tend vers zéro (on déterminera une telle constante sous la forme d'un entier).

5°. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en un point (x, y) .

6°. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en un point (x, y) .

7°. Interpréter à la lumière de ces résultats la majoration obtenue dans la question 4°.

8°. Calculer la tangente de l'angle θ du plan d'équation $z = 0$ et du plan tangent au point (x, y, z) de la surface définie par l'équation $z = f(x, y)$ dans un repère orthonormé.

9°. Décrire le mouvement de ce plan tangent lorsque le point $(x, y, 0)$ décrit une demi-droite du plan $z = 0$ d'origine $(0, 0)$.

Exercice 3

L'exercice étudie quelques propriétés des triangles pseudo-rectangles, c'est-à-dire des triangles ABC d'un plan euclidien dont les mesures des angles, par définition strictement comprises entre 0 et π , notées \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} , vérifient la relation :

$$\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}.$$

Les longueurs des côtés sont notées $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Les questions ci-dessous sont largement indépendantes entre elles.

1°. Décomposer un triangle équilatéral en trois triangles pseudo-rectangles.

2°. Déterminer le milieu du segment BB' où B' est l'intersection de la droite BC et de la perpendiculaire issue de A à la droite AC .

3°. Que peut-on dire des angles de la droite BC avec les deux bissectrices de l'angle en A du triangle ABC ?

4°. Calculer \hat{B} , \hat{C} , a , b , c et l'aire S du triangle en fonction de \hat{A} et du rayon R de son cercle circonscrit.

5°. Les points B et C étant fixés dans le plan, indiquer une construction géométrique du troisième sommet A à partir de la mesure de l'angle en C . Quel est le lieu de ce sommet ?

6°. Que peut-on dire de la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC ?

7°. Que peut-on dire de l'orthocentre du triangle ABC ?

8°. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur \hat{A} , R et la distance h de A à la droite BC pour qu'un triangle soit pseudo-rectangle.