

Exercice 1

\mathcal{P} désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , k est un réel strictement positif. On note (x, y) le couple des coordonnées d'un point M de \mathcal{P} .

Soit (γ) l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne : $xy = k$.

1° On considère trois points A, B, C de (γ) , deux à deux distincts, dont les abscisses sont notées a, b, c respectivement.

- Déterminer les coordonnées (α, β) du centre de gravité G du triangle ABC .
- Déterminer les coordonnées (λ, μ) de l'orthocentre H du triangle ABC .
Vérifier que H appartient à (γ) .

2° On suppose, dans cette question, que ABC est un triangle équilatéral.

- Que peut-on dire de G et H ?
- Montrer que a, b, c sont les racines du polynôme $P(X)$ avec :

$$P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3 \frac{k^2}{\lambda^2} X + \frac{k^2}{\lambda}.$$

- On appelle sommets de (γ) les points d'intersection de (γ) avec la droite d'équation : $y = x$. On suppose que H n'est pas l'un des sommets de (γ) .
Montrer que l'intersection du cercle circonscrit au triangle ABC avec (γ) contient un point D distinct de A, B, C . Préciser les coordonnées de D .

3° Soit r un réel non nul et $Q(X)$ le polynôme défini par :

$$Q(X) = X^3 - 3r X^2 - 3 \frac{k^2}{r^2} X + \frac{k^2}{r}.$$

- Déterminer le signe du produit $Q(0)Q(r)$. En déduire que $Q(X)$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles notées r_1, r_2, r_3 .
- Soient R_1, R_2, R_3 les points de (γ) d'abscisses respectives r_1, r_2, r_3 .
Démontrer que le triangle $R_1 R_2 R_3$ est équilatéral.

4° Donner une construction géométrique permettant d'obtenir tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à (γ) .

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par : $(x, t) \rightarrow f(x, t) = e^{-t^2\sqrt{x}} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right)$.

1° Pour x réel strictement positif fixé, montrer que l'application $t \rightarrow f(x, t)$ définie sur $]0, +\infty[$, est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2° Soit F l'application définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$x \rightarrow F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt .$$

a) Prouver que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et, pour x strictement positif, donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b) Montrer que F' est aussi définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -t e^{-t^2\sqrt{x}} \sin\left(\frac{t^3}{3}\right) dt .$$

En déduire que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et donner une expression de $F''(x)$ sous forme d'une intégrale.

3° Montrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) - 2\sqrt{x} y'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} y(x) = 0 .$$

4° Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5° On admet le résultat suivant : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Déterminer un réel K tel que pour tout réel u :

$$|\cos u - 1| \leq K u^2$$

b) Justifier l'existence du réel J défini par : $J = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^6 du$.

Pour x réel strictement positif, majorer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} \left| \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) - 1 \right| dt$ en

fonction de J et de x .

c) En déduire que $F(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/4}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

\mathbb{R} est le corps des nombres réels, \mathbb{C} celui des nombres complexes et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note E le \mathbb{K} -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} . O est la matrice nulle de E , I est la matrice identité de E . Pour M élément de E , tM et $tr(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de M et la trace de M . On note F le \mathbb{K} -espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans \mathbb{K} . Pour Y élément de F , tY désigne la matrice transposée de Y .

Soient A et B deux éléments de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in E, \quad f(M) = AM - M B.$$

Première partie. Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1° On suppose que A et B ont une valeur propre commune notée λ .

a) Justifier l'existence de Y et Z éléments non nuls de F vérifiant :

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z.$$

b) Prouver que $Y {}^tZ$ est un élément non nul de E . Calculer $f(Y {}^tZ)$.

2° On suppose qu'il existe M_0 élément non nul de E tel que : $f(M_0) = O$.

a) Pour k entier naturel, prouver que : $A^k M_0 = M_0 B^k$. En déduire que pour tout polynôme P à coefficients complexes on a :

$$P(A) M_0 = M_0 P(B).$$

b) Soit P_A le polynôme caractéristique de A . Que peut-on dire de $P_A(A)$?
En déduire que $P_A(B)$ n'est pas inversible dans E , et ensuite que A et B ont une valeur propre commune.

3° Démontrer que f est une bijection de E sur E si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre en commun.

4° En déduire que μ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que : $\mu = \alpha - \beta$.

Deuxième partie. Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1° Pour M et N appartenant à E , on pose : $\langle M | N \rangle = tr({}^tM N)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.

2° On note f^* l'endomorphisme adjoint de f . Montrer que :

$$\forall M \in E, \quad f^*(M) = {}^tA M - M {}^tB.$$

- 3°
- Soit D appartenant à E vérifiant : $\forall M \in E, DM = MD$. Prouver qu'il existe a dans \mathbb{R} tel que : $D = aI$.
 - En déduire que f est l'application nulle si et seulement si il existe a dans \mathbb{R} tel que :

$$A = B = aI$$
.
 - Démontrer que l'endomorphisme f est autoadjoint si et seulement si les matrices A et B sont symétriques.
- 4°
- On suppose que B est une matrice orthogonale et antisymétrique. Montrer que n est un entier pair.
 - On suppose de plus que A est une matrice orthogonale et symétrique. Démontrer que l'endomorphisme $\frac{1}{\sqrt{2}} f$ est un endomorphisme orthogonal de E .

5° On considère le cas particulier : $n = 2$. On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de f dans la base b de E , où $b = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Vérifier les résultats démontrés aux questions 3° b), 3° c) et 4° b).