

**CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE****Epreuve d'Informatique MP****durée 3 heures**

L'usage de la calculatrice est interdit

Indiquez en tête de copie ou de chaque exercice le langage utilisé.

1. Calendrier

Écrire la fonction

`dateValide`

données j, m, a : entiers

résultat : booléen

qui retourne `Vrai` si la date représentée par le triplet j, m, a (jour, mois, année) est une date valide, et `Faux` sinon

Règles de validité d'une date :

- janvier, mars, mai, juillet, août, octobre, décembre ont 31 jours ;
- avril, juin, septembre, novembre ont 30 jours ;
- février a 29 jours si l'année est bissextile, 28 sinon ;
- une année est bissextile si :
 - pour les années séculaires (1900,2000, etc.), elle est divisible par 400,
 - pour les autres années, si elle est divisible par 4 ;
- on se limitera aux dates postérieures au 15 octobre 1582, date de mise en application en France de ces règles (calendrier Grégorien).

Tournez la page S.V.P.

Par exemple, pour la liste suivante

| | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| liste | 1 | 5 | 7 | 8 | 6 | 2 | 7 | 9 | 4 |
| indice | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

la fonction retournerait 3, indice du premier élément du triplet (1,8,6) de somme 21.

4. Suite ordonnée des multiples de 2,3 et 5.

Le but de ce problème est de construire la suite ordonnée des entiers de la forme $2^p 3^q 5^r$, où p, q et r sont des entiers naturels.

Cette suite commence par

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| liste | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 16 | | | | |
| indice | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

↑ ↑ ↑
 i_5 i_3 i_2

Principe :

La liste étant en cours de construction, l'élément suivant de la liste sera à choisir parmi les nombres suivants : $2 * l[i_2]$, $3 * l[i_3]$, $5 * l[i_5]$ où i_2 (respectivement i_3 , i_5) est l'indice du plus petit

élément de la liste n'ayant pas son double (respectivement triple, quintuple) présent dans la liste.

Dans l'exemple, $i_2=8$, $i_3=6$ et $i_5=4$, et l'élément suivant est donc à choisir parmi $2*9=18$, $3*6=18$ et $5*4=20$.

Le plus petit étant 18, c'est l'élément à ajouter à la liste. Les indices concernés par le choix (ici i_2 et i_3) sont à augmenter de 1, ce qui donne le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| liste | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | | | |
| indice | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

↑ ↑ ↑
 i_5 i_3 i_2

Écrire, selon ce principe, le programme qui construit la liste triée des n premiers nombres de la forme $2^p 3^q 5^r$.

5. Suites de Fibonacci

Une suite de Fibonacci généralisée est définie par

$$u_0 = a$$

$$u_1 = b$$

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$$

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour calculer le $n^{\text{ème}}$ élément de la suite de Fibonacci initialisée par a et b .

1. Méthode récursive simple

On n'utilise pas de variable locale, on se contente de réécrire dans le langage utilisé la définition mathématique.

Écrire la fonction :

```
fibol      données n, a, b : entiers
           résultat f : entier
```

qui retourne le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Fibonacci initialisée par a et b en utilisant la méthode récursive.

2. Méthode itérative

On utilise une boucle avec trois variables locales :

- une variable contient l'avant dernier élément de la suite;
- une variable contient le dernier élément;
- une variable *contient* le nouvel élément.

Écrire la fonction :

```
fibo2     données n, a, b : entiers
          résultat f : entier
```

qui retourne le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Fibonacci initialisée par a et b en utilisant la méthode itérative.

3. La méthode la plus efficace : récursive par matrices

1. Montrer (mathématiquement) que
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

2. Écrire une fonction de multiplication de deux matrices carrées 2×2 .

3. Écrire une fonction d'élevation à la puissance n d'une matrice carrée de 2×2 en utilisant le principe d'exponentiation rapide :

$$A^0 = Id$$

$$A^{2n} = A^n \cdot A^n$$

$$A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A$$

4. Écrire la fonction :

```
fibo3     données n, a, b : entiers
          résultat f : entier
```

qui retourne le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Fibonacci initialisée par a et b en utilisant la formule

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

5. On estime que si une addition prend une unité de temps, une multiplication en coûte 4 et une division 7. Au niveau du coût arithmétique, comparer les méthodes fibo2 et fibo3 pour calculer u_{2003} .

Exercices de recherche

Pour ces deux problèmes, vous n'êtes pas guidés. Essayez de proposer un algorithme permettant de répondre aux questions posées.

6. Suites oscillantes

Soit f une fonction entière à valeur entière définie de $[0;10\ 000]$ dans $[0;10\ 000]$ et u la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ (avec } 0 \leq a \leq 10\ 000)$$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer (mathématiquement) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang
2. Écrire la fonction

`periode` données f : fonction; a : entier
 résultat p : entier; e : entier

qui étant donné une fonction f et un entier a retourne p (valeur de la période de la suite u définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$) et e un élément de cette période.

7. Plateau maximal

Écrire la fonction

`indicePlateauMaximal` données lst : liste d'entiers
 résultat : entier

qui retourne l'indice du premier élément de la plus grande sous-liste constante de lst , liste croissante au sens large de nombres entiers.

Dans l'exemple suivant,

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| liste | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| indice | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

la fonction retournerait 8 (indice de début de la plus longue sous-liste constante)