

N54F



Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Preliminaires

On considère la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \alpha_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^i du.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre α_i et α_{i+2} , pour tout entier naturel i .
2. En déduire que :

partie I

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$; justifier qu'il existe une et une seule solution φ de (\mathcal{E}_f) , définie sur I , et telle que $\varphi(0) = y_0$? On énoncera avec précision le théorème utilisé.
2. Montrer que toutes les solutions de (\mathcal{E}_f) sont de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
3. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$$(1 - x^2) y' - x y = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

- (b) Etant donné un réel y_0 , démontrer que l'unique solution φ de l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) telle que $\varphi(0) = y_0$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + y_0 \right).$$

- (c) Dans le cas particulier où l'équation différentielle est :

$$(1 - x^2) y' - x y = 1 \quad (\mathcal{E}_1),$$

déterminer les solutions sur I .

partie II

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m . On rappelle que c'est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $m + 1$.

Dans la suite du problème, on assimilera un polynôme P et sa fonction polynôme $x \mapsto P(x)$.

Pour tout polynôme P , on note P' son polynôme dérivé. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(P)(x) = (1 - x^2)P'(x) - xP(x).$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Démontrer que $\Delta(P)$ est un polynôme dont on exprimera le degré en fonction de celui de P .
2. Démontrer que $P \mapsto \Delta(P)$ induit une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.
On note Δ_m cette application linéaire.
3. Démontrer que Δ_m est injective.
4. Déterminer le rang de Δ_m . Que peut-on en déduire pour l'espace image de Δ_m ?
5. Exprimer la matrice A_m de Δ_m relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

On cherche dans cette partie pour quelles applications f , l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) admet une solution polynomiale, c'est-à-dire une solution de la forme $x \mapsto P(x)$, où P désigne un polynôme

7. Soit Q un polynôme à coefficients réels et de degré n non nul. On pose $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On note

(b) Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ l'une de ces solutions ;

i. Exprimer, pour $k \geq 1$, a_{k+1} en fonction de a_{k-1} et b_k .

ii. En déduire, pour $k \geq 1$, une relation vérifiée par $\frac{a_{2k}}{\alpha_{2k}}$, $\frac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}}$ et $\frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}$ (on utilisera la question 1. des préliminaires).

iii. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p} sous forme de sommes dépendant de a_0 , des α_{2k} et des b_{2k-1} , avec $1 \leq k \leq p$.

iv. De même, déduire de la question (i) ci-dessus, pour $k \geq 1$, une relation vérifiée par $(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k}$, $(2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2(k-1)}$ et $b_{2k}\alpha_{2k}$.

v. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p+1} sous forme de sommes dépendant des α_{2k} et des b_{2k} , avec $1 \leq k \leq p$.

2. Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction définie, pour tout $x \in]-1, 1[$, par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

(a) Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

(b) Montrer que φ est une solution de (\mathcal{E}_f) sur $]-1, 1[$.

(c) On veut démontrer que $\varphi(x)$ admet $-f(1)$ pour limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

i. Soit $x \in]-1, 1[$ et soit $\theta \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Démontrer que :

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin(\theta)} \int_0^\theta f(\cos(u)) du.$$

ii. Soit F la fonction définie par :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[\quad F(\theta) = \int_0^\theta f(\cos(u)) du.$$

Justifier la dérivabilité de F sur $]-\pi, \pi[$ et déterminer sa fonction dérivée F' . On énoncera avec précision le théorème utilisé.

iii. Conclure.

(d) On pose maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

i. Expliciter φ_0 et φ_1 .

ii. Montrer que pour tout $k \geq 2$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\varphi_k(x) = -\frac{x^{k-1}}{k} + \frac{k-1}{k} \varphi_{k-2}(x).$$

iii. Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que φ_{2p+1} est une fonction polynomiale de degré $2p$.

iv. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_{2p} de degré $2p-1$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \varphi_{2p}(x) = P_{2p}(x) + \alpha_{2p} \varphi_0(x).$$

v. Quelles sont les valeurs de k , pour lesquelles les fonctions φ_k admettent une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

(e) Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} b_k \varphi_k$ converge simplement vers φ sur $]-1, 1[$.