LK57

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I

1. On considère la fonction g de variable réelle définie par : $g(u) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer, pour tout $u > 1$, un réel α_u dans $]0,1[$ tel que : $\displaystyle\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot$
   (c) Dériver $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et intégrer par parties $\displaystyle\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,\mathrm{d}t$ pour en déduire que :
   $$\forall u > 1,\ |g(u)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{u}}\cdot$$

2. Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $]-\pi,\pi]$ est représentée dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par le demi-cercle de centre O, de rayon π et d'ordonnées positives.
   (a) Pour tout $x \in]-\pi,\pi]$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
   (b) Énoncer le théorème de DIRICHLET. S'applique-t-il à la fonction f ?

3. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de FOURIER trigonométriques de f notés a_n et b_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{2}{n}\,g(\pi\,n)$.

4. (a) Établir la convergence normale de la série de FOURIER de f. Cela contredit-il le 2°b ?
   (b) Montrer à l'aide du théorème de PARSEVAL que la série de FOURIER de f converge vers f.

Exercice II

Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \neq 0$, ainsi que l'équation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \qquad (\mathscr{E})$$

1. (a) Montrer qu'une telle fonction f vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ si et seulement si il existe une fonction

(c) Soient g et h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et telles que $g(0) = h(0)$.
Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R},\ f(0,y) = h(y).$$

2. Dans cette question, f désigne une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}^2$, strictement positive.
   (a) Montrer que f présente en (x_0, y_0) un maximum local si et seulement si les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x, y_0)$ présentent respectivement en x_0 et en y_0 un maximum local.
   (b) En déduire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f présente un maximum local est de la forme $A \times B$, où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ à préciser.

3. Soit maintenant la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = (xy)^3 + |xy|^3$.
   (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (On pourra écrire F comme une composée).