76ER

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, [redacted]

2 Deuxième partie : Quelques propriétés de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}_{(a,n)}: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & X(X+1)P''(X) \; + \; (aX-1)P'(X). \end{array}$$

2.1) Justifier rapidement que $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2) Ecrire la matrice M_a de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $(X^k, 0 \leq k \leq n)$.

2.3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ tel que $\lambda = k(a + k - 1)$.

2.4) Montrer que si $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'endomorphisme $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est diagonalisable.
Dans le cas particulier où $a = 0$, $\mathcal{A}_{(0,n)}$ est -il diagonalisable ?

3 Troisième partie : Recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies dans l'intervalle ouvert $]-1,+1[$ et qui sont des sommes de séries entières dans cet intervalle : ainsi f appartient à $\mathcal{E}$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3.1) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ alors f est de classe C^∞ sur $]-1,+1[$.

On considère alors dans toute cette partie l'endomorphisme $\mathcal{D}_a$ de $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}_a: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & f & \longmapsto & \mathcal{D}_a(f) \end{array}$$

où $\mathcal{D}_a(f)(x) = x(x+1)f''(x) + (ax-1)f'(x)$ pour tout $x \in]-1,+1[$.

3.2) Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{D}_a(f) = af$. On pose pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n-1)((n+a)a_n + (n+1)a_{n+1}) = 0.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

$$a_n = \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} a_2$$

et dans le cas particulier où $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, donner les valeurs de a pour lesquelles la série entière est un polynôme ; on déterminera alors son degré et son coefficient dominant en fonction de a.

c) Déterminer, selon $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

3.3) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}_a(f) = af$.

3.4) Comparer, selon $a \in \mathbb{R}$, les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{(a,n)} - aId_{\mathbb{R}_n[X]})$ et

4 Quatrième partie : Résolution d'une équation différentielle

On note $\mathcal{C}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et Δ_a l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty$:

$$\begin{array}{cccc} \Delta_a : & \mathcal{C}^\infty & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty \\ & f & \longmapsto & \Delta_a(f) \end{array}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Delta_a(f)(x) = \; x(x+1)f"(x) \; + \; (ax-1)f'(x)$.

4.1) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x(x+1)y" \; + \; (ax-1)y' \; - 2(a+1)y \; = \; 0 \; .$$

Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

[redacted]