B47H

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice1

[illegible]

$S_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbf{R})$, $S_n^+(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est positive ou nulle, $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est strictement positive.

[redacted]

Partie B

Dans cette partie on utilise l'inégalité (1) de la Partie A pour établir l'inégalité d'Hadamard .
Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$.

1° Vérifier que l'on peut appliquer l'inégalité (1) à ${}^t A A$.

2° En déduire l'inégalité d'Hadamard : $\left|\det(A)\right| \leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_{ki})^2}$.

Partie C

Dans cette partie on utilise l'inégalité d'Hadamard pour établir un résu[redacted]tat concernant les

[redacted]

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $a_0 \neq 0$. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ l'unique suite réelle vérifiant :

$$a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 .$$

1° Pour $n \geq 1$, on considère la matrice A de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & \cdots & & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que A appartient à $GL_{n+1}(\mathbf{R})$. Appliquer les formules de Cramer pour en déduire que $b_n = \dfrac{\det(A')}{\det(A)}$ où A' est une matrice de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ à préciser .

2° On suppose qu'il existe un réel r strictement positif tel que la série de terme général

Exercice3

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction numérique F de la variable réelle x telle que :