WL81

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I :

1) Déterminer le rayon de convergence R strictement positif de la série entière $\sum \dfrac{(-x)^n}{3n+1}$.

2) a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{3n}\mathrm{d}t$ où n est un entier naturel.

b) En déduire, en justifiant avec soin, la permutation des symboles $\sum$ et $\int$, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1}$ lorsque x appartient à l'intervalle $]-R, R[$.

(Il pourra être utile pour les calculs de poser : $a = \sqrt[3]{x}$)

3) Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente et calculer sa somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice II :

Soit n un entier strictement positif, A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. On définit deux matrices U et V carrées d'ordre $2n$ à coefficients complexes par :

$$U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Première partie.

Dans cette partie, on suppose que les deux matrices U et V sont semblables, c'est à dire qu'il

[redacted]

3) Déterminer une matrice H carrée d'ordre n telle que : $HA - AH = A$.

4) Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

5) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice III :

On considère, trois réels α, β et γ non nuls et la quadrique $(\sum)$ dont une équation est

$$\alpha^2 (x+y+z)^2 + \beta^2 (-x+y)^2 + \gamma^2 (2y+z)^2 = 1$$

dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ d'un espace affine de dimension trois.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+y+z=0$ et $-x+y=0$ sont orthogonaux.

b) On note $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ les deux vecteurs unitaires, d'abscisses positives, normaux respectivement aux plans (P) et (Q). Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ ainsi que le vecteur $\overrightarrow{K}$ tel que le repère $\mathcal{R}' = \left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ soit orthonormé direct.

c) Déterminer une équation de la quadrique $(\sum)$ dans le repère $\mathcal{R}'$. On notera X, Y et Z les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}'$.

d) Que peut-on dire de la nature de la quadrique $(\sum)$?

2) On note $(\mathcal{C})$ la conique obtenue comme intersection de la quadrique $(\sum)$ avec le plan d'équation