



## CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

### Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

#### Exercice I :

- 1) Déterminer le rayon de convergence  $R$  strictement positif de la série entière  $\sum \frac{(-x)^n}{3n+1}$ .
- 2) a) Calculer  $\int_0^1 t^{3n} dt$  où  $n$  est un entier naturel.  
 b) En déduire, en justifiant avec soin, la permutation des symboles  $\sum$  et  $\int$ , la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1}$  lorsque  $x$  appartient à l'intervalle  $]-R, R[$ .  
 (Il pourra être utile pour les calculs de poser :  $a = \sqrt[3]{x}$ )
- 3) Montrer que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$  est convergente et calculer sa somme :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ .

## Exercice II :

Soit  $n$  un entier strictement positif,  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients complexes. On définit deux matrices  $U$  et  $V$  carrées d'ordre  $2n$  à coefficients complexes par :

$$U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

### Première partie.

Dans cette partie, on suppose que les deux matrices  $U$  et  $V$  sont semblables, c'est à dire qu'il existe une matrice  $P$  inversible d'ordre  $2n$  à coefficients complexes vérifiant l'égalité :

$$U = P^{-1}VP$$

1) Soit  $R$  un polynôme à coefficients complexes. Montrer que :

$$R(U) = \begin{pmatrix} R(A) & AR'(A) \\ 0 & R(A) \end{pmatrix}$$

où  $R'$  est le polynôme dérivé du polynôme  $R$ .

2) On note  $\prod$  le polynôme minimal de la matrice  $A$ , c'est à dire le polynôme unitaire annulateur de la matrice  $A$  de plus petit degré  $\alpha$  strictement positif. On pose  $\prod(X) = \sum_{p=0}^{\alpha} b_p X^p$ .

Déterminer la matrice  $V^k$  pour  $k$  entier naturel, en déduire la matrice  $\prod(V)$ .

3) Établir l'égalité :  $\alpha \prod(X) = X \prod'(X)$ , où  $\prod'$  est le polynôme dérivé du polynôme  $\prod$ .

4) En déduire que la matrice  $A$  est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier  $N$  tel que  $A^N = 0$ .

### Deuxième partie.

Dans cette partie, on suppose que la matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  à coefficients complexes vérifie la propriété suivante :

$$A^n = 0 \quad \text{et} \quad A^{n-1} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

2) Déterminer une matrice  $D$  diagonale d'ordre  $n$  telle que :

$$DJ - JD = J.$$



