$\boxed{2°)}$ On prend ici $n = 1$, et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$, toujours muni du produit scalaire défini par:

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

a) Expliciter P_0, P_1, P_2 définis en 1°), et en déduire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour Δ.

b) Soit $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$. Calculer la distance euclidienne de $A = X + 1$ au sous-espace vectoriel G de E.

c) Montrer que $C = \{h \in \mathcal{L}(E) / h \circ \Delta = \Delta \circ h\}$ est un espace vectoriel réel de dimension 3. On pourra utiliser la matrice de Δ et de $h \in C$ dans la base (P_0, P_1, P_2).

d) Déterminer tous les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = \Delta$. On les donnera par leur matrice dans la base (P_0, P_1, P_2).

EXERCICE 2

On rappelle les deux formules usuelles de trigonométrie, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \quad ; \quad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

$\boxed{1°)}$ On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

a) Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par: $f_1(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$.

(i) Représenter la courbe C_1 d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

(ii) Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par f_1, c'est-à-dire:

$$\{(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.

Etudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2, c'est-à-dire:

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer C_2 avec la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$x + y^2 = 1, \text{ avec } -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

c) Soit $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t)\sin(t), \sin(t))$.

Etudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3, c'est-à-dire:

$$C_3 = \{(\cos(t)\sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$: $\quad (2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1.$

$\boxed{2°)}$ On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{C}$ soit orthonormale directe.

a) Soit $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2.

b) Soit $\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad \begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \right\}.$

Que représente Γ vis-à-vis de S_1 et S_2 ?

c) Déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1. De même déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2.

En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de Γ.

d) Déterminer un paramétrage de Γ, en utilisant les coordonnées cylindriques: c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ.

En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ.

e) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose: $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?

f) Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy, xOz et yOz, en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.

EXERCICE 3

$\boxed{1°)}$ **a)** Justifier l'existence des intégrales:

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$$

b) Justifier l'existence et calculer $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que $f(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, \pi]$.
Calculer les coefficients de Fourier de f.

En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé.

d) Soit $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Justifier que $\frac{3}{4}T = S$, et grâce à c) en déduire la valeur de T.

e) En utilisant la série de terme général u_n, justifier l'égalité: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé. En déduire les valeurs des intégrales J et K de a).

f) Justifier l'existence des intégrales suivantes: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,dx$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx$

et les calculer grâce aux résultats précédents.

$\boxed{2°)}$ **a)** Calculer: $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, et justifier l'existence de: $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$.

b) Justifier l'égalité: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = -(\ln(2))^2 - B$.

c) Calculer: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ en fonction de B, et en déduire la valeur de B.

$\boxed{3°)}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = h_n - \ln(n)$.

a) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $g(x) = x + \ln(1-x)$ quand x tend vers 0. En déduire un équivalent simple de $a_{n+1} - a_n$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$, et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$.

On pourra noter $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{h_n}{n}$, ainsi que de terme général $(-1)^{n-1}\frac{h_n}{n}$.

$\boxed{4°)}$ **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $v_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)\,dx$, et montrer que: $\quad v_n = -\dfrac{h_{n+1}}{n+1}$.

b) Montrer l' égalité des trois réels U, V et W, avec

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{h_n}{n}, \quad V = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,dt, \quad W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}.$$