e3a

10MP04

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve d'Informatique MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Indiquer en tête de copie ou de chaque exercice le langage utilisé

Quel que soit le langage utilisé, le candidat pourra supposer qu'il dispose d'une fonction `test_liste_vide` qui prend en entrée une liste et renvoie le booléen 1 si la liste est vide et 0 sinon.

Le candidat pourra, s'il le juge utile, supposer que chaque liste se termine par un élément de marquage de fin de liste appelé NIL.

Dans tous les exercices, on considérera que les éléments d'un tableau de longueur n sont indicés de 1 à n. Le candidat pourra supposer qu'il en est ainsi dans le langage qu'il utilise.

TOURNE LA PAGE S.V.P.

Exercice 1

a) Ecrire la fonction :

---

verification_liste

données L : `liste d'entiers naturels`
`résultat` b : `booléen`

---

qui prend en entrée une liste L d'entiers naturels et renvoie le booléen 0 (ou `true`) lorsqu'au moins un des éléments de la liste n'est pas égal à 0, 1, ou 2 et 1 (ou `false`) sinon.

b) Ecrire la fonction :

---

tri_tableau

`données` N : `entier naturel`
T : `tableau d'entiers naturels de longueur` N
`résultat` U : `tableau d'entiers naturels de longueur` N

---

qui prend en entrée un tableau T qui ne contient que des 0, 1 ou 2 et renvoie le tableau trié dans l'ordre croissant. On ne créera pas de tableau intermédiaire à l'intérieur du programme et on proposera un algorithme en temps linéaire.

Exercice 2

Une application φ de l'ensemble $\{1, 2, ..., 100\}$ dans lui-même est représentée par un tableau T à cent cases : Pour tout entier i dans $\{1, 2, ..., 100\}$, la i-ème case du tableau T contient la valeur $\varphi(i)$.

Ecrire un programme `inverse` qui prend en entrée le tableau T et retourne le tableau U représentant l'application inverse φ^{-1} lorsque φ bijective ; dans le cas contraire, le programme affiche le message " NON BIJECTIF".

Exercice 3

En plus de la fonction `test_liste_vide` qui prend en entrée une liste et renvoie le booléen 1 si la liste est vide et 0 sinon, on dispose des diverses fonctions et procédures :

x `MOD` n retourne le reste de la division euclidienne de l'entier naturel x par l'entier naturel non nul n.

`ajouter`(y, L) ajoute l'élément y en tête de la liste L.

`supprimer_tête`(L) supprime la tête de la liste L.

1. On considère le programme suivant qui prend en entrée une liste contenant des listes de longueur fixée ne contenant que des 0 ou des 1 et retourne une liste de même type. On remarquera qu'une liste de listes peut contenir uniquement la liste vide.

```
PROG(L : liste de listes, k : entier naturel non nul )
variables : x : entier, U : liste de listes, V0 : liste de listes, V1 : liste de listes,
W0 : liste de listes, W1 : liste de listes, L1 : liste d'entiers,
U ← L
V0 ← liste_vide
V1 ← liste_vide
W0 ← liste_vide
W1 ← liste_vide
tant que test_liste_vide(U) = 0 faire
                                    L1 ← tête(U)
                                    x ← tête(L1)
                                    si (x = 0) alors ajouter(supprimer_tête(L1), V0)
                                    sinon ajouter(supprimer_tête(L1), V1)
                                    fin si
                                    supprimer_tête(U)
                                    fin faire
si(k > 1) faire V1 ← PROG(V1, k − 1)
               V0 ← PROG(V0, k − 1)
fin si
tant que test_liste_vide(V1) = 0 faire
                                    L1 ← tête(V1)
                                    ajouter(1, L1)
                                    ajouter(L1, W1)
                                    supprimer_tête(V1)
                                    fin faire
tant que test_liste_vide(V0) = 0 faire
                                    L1 ← tête(V0)
                                    ajouter(0, L1)
                                    ajouter(L1, W0)
                                    supprimer_tête(V0)
                                    fin faire
tant que test_liste_vide(W0) = 0 faire
                                    ajouter(tête(W0), U)
                                    supprimer_tête(W0)
                                    fin faire
tant que test_liste_vide(W1) = 0 faire
                                    ajouter(tête(W1), U)
                                    supprimer_tête(W1)
                                    fin faire
retourner(U)
```

a) Décrire l'exécution du programme PROG ci-dessous pour l'entrée
$L = [[1, 0, 1], [0, 1, 1], [0, 0, 0], [1, 1, 0]], k = 1$:

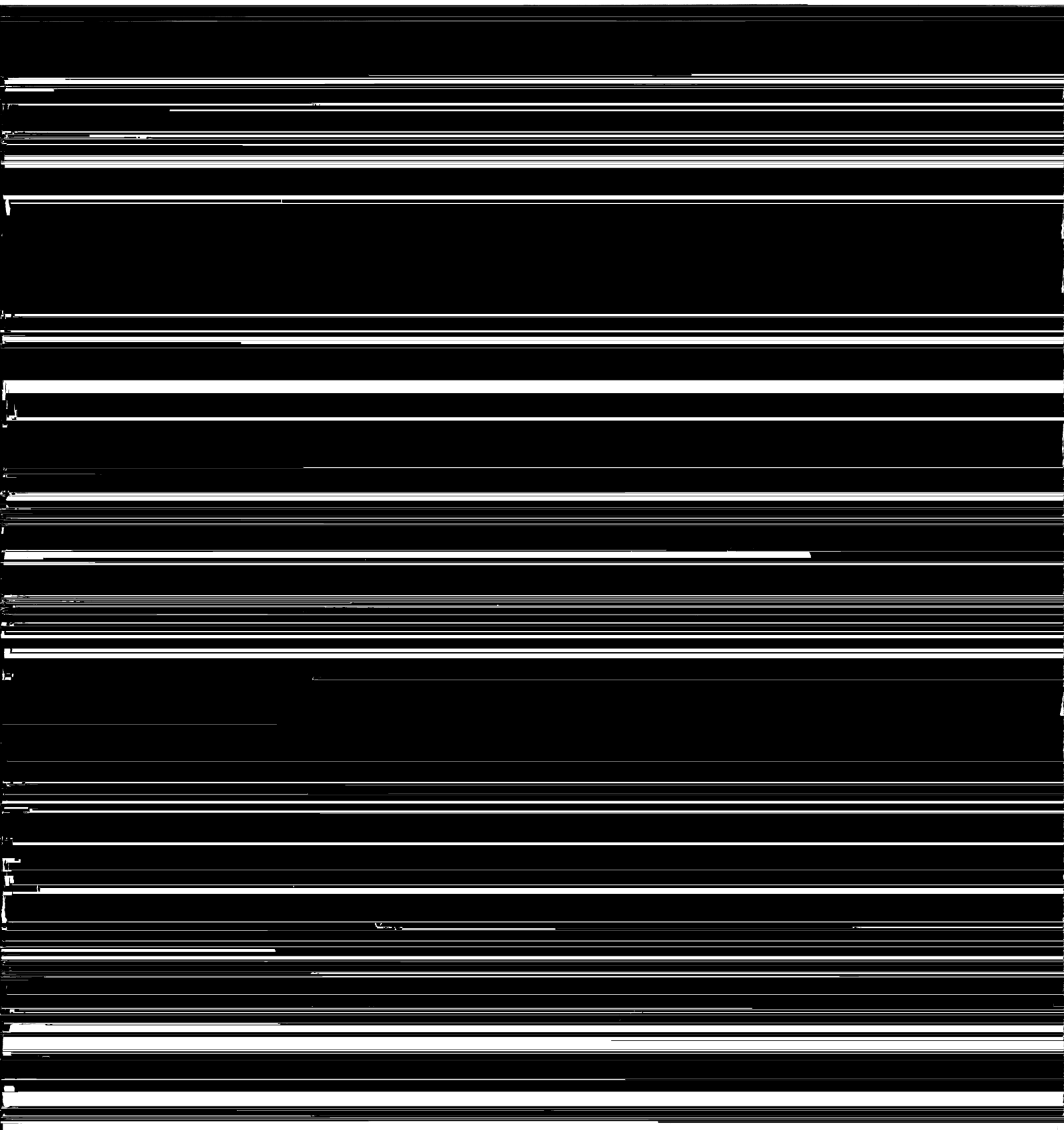
b) Décrire l'exécution du programme PROG ci-dessous pour l'entrée
$L = [[1, 0, 1], [0, 1, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0]], k = 3$:

c) Que calcule le programme PROG ?

TOURNE LA PAGE S.V.P.

d) Démontrer que le programme PROG termine.

2. Qu'effectue la fonction ci-dessous :



$x \leftarrow n$
pour i de 1 à k faire

$y \leftarrow x$ MOD 2
ajouter(y, L)
$x \leftarrow (x - y)/2$
fin faire

Exercice 4

Soit Σ sur un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur l'alphabet Σ. Soient $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n$ les lettres de Σ telles que $u = a_1...a_m$ et $v = b_1....b_n$.

On dit que u est un *sous-mot* de v si u est le mot vide ϵ ($m = 0$) ou s'il existe une application strictement croissante de $\{1, ..., m\}$ dans $\{1, ..., n\}$ notée φ, telle que $a_i = b_{\varphi(i)}$, pour tout entier i compris entre 1 et m.

1. Dans cette question, Σ est l'alphabet à deux lettres $\{x, y\}$. Déterminer l'ensemble des sous-mots du mot $xyxyx$. Combien y-en a t'il?

2. Dans le cas général, démontrer que l'ensemble des sous-mots du mot $v = b_1...b_n$ est fini et proposer une majoration de son cardinal en fonction de n.

3. On suppose que u est un sous-mot de v. Soit $M(u, v)$ l'ensemble des applications φ, φ application strictement croissante de $\{1, ..., m\}$ dans $\{1, ..., n\}$ telle que $a_i = b_{\varphi(i)}$, pour tout entier i compris entre 1 et m.

   a) Soit j le plus petit indice dans $\{1, ..., n\}$ tel que $b_j = a_1$. Démontrer que toute application φ dans $M(u, v)$ vérifie $\varphi(1) \geqslant j$.

   b) Démontrer qu'il existe une application φ_0 dans $M(u, v)$ telle que, pour toute application φ dans $M(u, v)$ et tout indice i dans $\{1, ..., m\}$, $\varphi(i) \geqslant \varphi_0(i)$.

   c) Ecrire un algorithme qui prend en entrée les listes $U = [a_1, ..., a_m]$ et $V = [b_1, ..., b_n]$ et qui renvoie la liste $[\varphi_0(m), \varphi_0(m-1), ..., \varphi_0(1)]$.

   d) Ecrire un algorithme qui prend en entrée les listes $U = [a_1, ..., a_m]$ et $V = [b_1, ..., b_n]$ et qui renvoie un booléen égal à 1 si u est un sous-mot de v, 0 sinon. L'algorithme ne doit parcourir qu'une fois chacune des listes U et V. Estimer la complexité de votre algorithme en fonction des entiers m et n.

4. Le cardinal de l'ensemble $M(u, v)$ est noté $[u, v]$. Soient u' et v' les mots tels que $u = a_1u'$ et $v = b_1v'$.

   a) Lorsque $a_1 = b_1$, démontrer l'égalité $[u, v] = [u', v'] + [u, v']$.

[redacted]

TOURNE LA PAGE S.V.P.

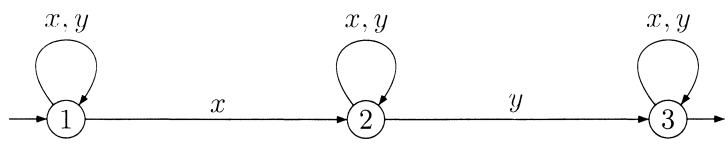


Figure 1: Automate $\mathcal{A}$

Exercice 5

La fonction XOR (ou exclusif) est notée $\oplus$.

Soit f la fonction booléenne définie sur $\{0,1\}^4$ par $f(x,y,z,t) = 1$ si et seulement si le nombre de 1 parmi x, y, z, t est impair, pour tout (x,y,z,t) dans $\{0,1\}^4$.

1. Ecrire la table de vérité de la fonction $\oplus$.
2. Démontrer la propriété d'associativité de la fonction $\oplus$, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y,z) \in \{0,1\}^3,\ (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

3. Ecrire f avec une formule booléenne.
4. Construire un circuit logique implémentant la fonction f utilisant uniquement des portes XOR (ou exclusif).
5. Etant donné un entier naturel n non nul, construire un circuit logique qui prend en entrée n bits et donne en sortie la parité du nombre de ces bits égaux à 1 en utilisant au plus $n-1$ portes XOR.

Figure 2: Porte XOR (ou exclusif)

FIN DE L'EPRE E