Préliminaires.

On rappelle $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ l'application qui à $y \in E$ associe $\varphi(y) = y'' + \lambda y$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Soit $h \in E$. Existe-t-il $y \in E$ telle que $\varphi(y) = h$?
3. φ est-elle surjective ?
4. Montrer que le noyau de φ est de dimension finie.
5. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ uniquement constituée de fonctions paires et de fonctions impaires. On pourra discuter suivant le signe de λ.
6. Quelle est la structure de l'ensemble des antécédents de la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ par φ ? Décrire précisément cet ensemble.
7. **7.1** Déterminer l'intersection de $\ker(\varphi)$ avec $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions bornées de E.

   7.2 Ces deux sous-espaces sont-ils en somme directe ?

   7.3 Si on suppose $\lambda < 0$, existe-t-il $f \in \ker(\varphi)$ et $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = f(x) + g(x)$?

   7.4 Lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$, les sous-espaces $\ker(\varphi)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Partie 1.

1. Soit f la fonction 2π - périodique, définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par :
$$f(x) = \frac{1}{12}\left(3x^2 - \pi^2\right).$$

   1.1 Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 5\pi]$.

   1.2 Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

   1.3 Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

   1.4 Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et calculer sa somme β.

   1.5 Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un entier q tel que $\left| \sum_{n=1}^{q} \frac{(-1)^n}{n^2} - \beta \right| < \varepsilon$.

   1.6 Calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

   1.7 La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $h : x \longmapsto h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}$.

   2.1 Prouver que h est définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   2.2 Déterminer les fonctions $v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$.

   2.3 Vérifier que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

   2.4 Prouver que h est de classe C^2 sur $]-\pi, \pi[$.
3. Montrer que h est solution sur $]-\pi, \pi[$ d'une équation différentielle du type $y'' + \lambda y = k$ où λ et k sont des constantes réelles.
4. Calculer $h'(0)$ et $h'_g(\pi)$ (dérivée à gauche de h en π).
5. En déduire que : $\forall x \in]-\pi, \pi[,\ h(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}(a x)}{2 a \operatorname{sh}(a \pi)} - \frac{1}{2 a^2}$.

6. Justifier que l'égalité précédente est encore valable sur le segment $[-\pi, \pi]$.

7. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$.

8. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie 2.

On prend dans cette partie : $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Prouver que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx$ converge.

2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx} \sin(ax)\, dx$.

   2.1 Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale J_k existe-t-elle ?

   2.2 Pour ces valeurs, calculer J_k.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer sous forme d'une intégrale

$$R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx - a \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^2 + (k+1)^2}$$

4. Prouver que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

5. En déduire le résultat :

$$\forall\, a > 0,\ \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2\, a \operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2\, a^2}.$$

Fin de l'épreuve