d. Démontrer que la suite (a_n) est bornée et justifier la relation $R \geq 1$.

2. Démontrer que pour $x > -1$, la fonction :

$$F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On définit une fonction f sur $]-1, +\infty[$ en posant :

$$\forall x > -1,\ f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

3. Démontrer que f admet un développement en série entière en 0 de la forme :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

et expliciter les coefficients b_n à l'aide des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^p}\,\mathrm{d}t$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

4. Démontrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et calculer $f'(x) - f(x)$ pour $x > -1$.

5. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!$ à l'aide des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^p}\,dt$.

Exercice 2

On étudie dans cet exercice des équations de la forme :

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : \qquad M^2 + pM + qI_n = 0$$

où l'inconnue M est une matrice carrée de taille n à coefficients réels ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), p et q sont deux paramètres réels et I_n désigne la matrice identité de taille n.

1. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$E(M) = \{PMP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

Démontrer que si M est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ alors toute matrice $M' \in E(M)$ est également solution.

Dans la suite, les ensembles de solutions des équations $(\mathcal{E}_{p,q})$ pourront être écrits sous la forme d'une réunion d'ensembles $E(A)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$:

$$M^2 - (a+b)M + abI_n = 0$$

avec a et b deux réels distincts.

Exercice 3

Soit n un entier, $n \geq 1$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $P, Q \in E$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{et} \qquad f(P) = ((X^2 - 1)P')'$$

1. Démontrer que φ définit un produit scalaire sur E.

On considère dans la suite l'espace euclidien E associé au produit scalaire φ. La norme euclidienne de $P \in E$ est notée $\|P\|$.

2. Démontrer que f est un endomorphisme de E.
3. Rappeler les définitions de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien et d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.
4. Démontrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
5. Déterminer $\ker f$ et en déduire le rang de f.
6. On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$ et on définit le polynôme $P_0 = 1 + X$.

a. Déterminer le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathrm{Im} f$.

b. Déterminer $m = \inf\limits_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|P_0 - f(P)\|$.

c. Résoudre l'équation $\|P_0 - f(P)\| = m$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

7. On définit une suite $(L_k)_{k \geq 0}$ de polynômes en posant $L_0 = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ L_k = \left((X^2 - 1)^k\right)^{(k)}$$

(c'est à dire : L_k est la dérivée k-ième de $(X^2 - 1)^k$).

a. Calculer les polynômes L_1, L_2 et L_3.

b. Déterminer le degré de L_k.

c. À l'aide de la formule de Leibniz, exprimer les polynômes :

$$A_k = ((X^2 - 1)(X^2 - 1)^k)^{(k+2)}$$
$$B_k = (X(X^2 - 1)^k)^{(k+1)}$$

à l'aide des polynômes L_k, L'_k et L''_k.

d. Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(X^2 - 1)L''_k + 2XL'_k - k(k+1)L_k = 0$$

e. À l'aide de la relation précédente, démontrer que L_k est un vecteur propre de f (on précisera la valeur propre associée).

f. Démontrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de E.