(3) Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \notin S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.

(b) En déduire que l'on a $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ en toute généralité.

Partie B

Dans cette partie, q désigne un nombre complexe différent de 0 et de 1. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients complexes. On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est $\mathcal{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On pose $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On définit les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathcal{L}_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto XA \end{aligned}$$

(1) Déterminer les matrices de $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Montrer que la matrice de l'endomorphisme $\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes

(a) $\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$,

(b) $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det(\begin{pmatrix} d - qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a - qd \end{pmatrix})$,

(c) $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\Big((1+q)^2\det(A) - q\left(\mathrm{Tr}(A)\right)^2\Big)$.

(4) On suppose à présent que le polynôme caractéristique de A se décompose en le produit $P_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que l'on a $\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$.

(b) A l'aide des questions précédentes, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
– Il existe une matrice non nulle B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = qBA$.
– On a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.

(4) En déduire que la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

Partie C

(1) Soient α et β deux réels strictement positifs. Montrer que la fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}}$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, la fonction S_x définie par $S_x(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{x}{t})$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Soient α et β deux réels strictement positifs. En utilisant le changement de variable $s = S_{\alpha\beta}(t)$, démontrer que l'on a

$$\forall x > 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+(\frac{\alpha+\beta}{2})^2)(s^2+\alpha\beta)}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}.$$

(c) En déduire l'égalité

$$\forall x > 0 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+(\frac{\alpha+\beta}{2})^2)(t^2+\alpha\beta)}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}.$$

Partie D

(1) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+(a_n(x))^2)(t^2+(b_n(x))^2)}}.$$

(2) Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on définit la fonction

$$h_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2+(a_n(x))^2)(t^2+(b_n(x))^2)}}.$$

(a) Montrer que, pour $t > 0$ et $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = \dfrac{1}{t^2+(f(x))^2}$.

(b) Démontrer l'inégalité $0 < h_n(t) \leq \dfrac{1}{t^2+x}$ où $t > 0$, $x > 0$ et $n \geq 1$.

(c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)dt = \frac{\pi}{2f(x)}$ où $x > 0$.

(d) En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{\pi}{2f(x)}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.