Partie I : Résultats préliminaires.

1) Etude de f :
   a) Etudier la fonction f puis tracer sa courbe représentative $\left(C_f\right)$.
   b) $\left(C_f\right)$ possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.
   c) Donner le développement limité à l'ordre 8 en 0 de f.
   d) Donner les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k\in\{1,\dots,8\}$. Enoncer avec soin le ou les théorème(s) utilisé(s).

2) Etude de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   a) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite convergente ?
   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.
   d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$?

3) Etude d'une intégrale impropre :
   a) Justifier l'existence de F. Enoncer avec précision le théorème utilisé.
   b) Justifier l'existence de α.
   c) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ (justifier avec soin).
   d) En déduire que $\alpha=2F(1)$.
   e) i) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

      ii) Montrer que $\alpha\leq\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)\leq\alpha+1$.

Partie II : Intégrales de Wallis.

Dans cette partie si $n\in\mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale suivante : $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$.
3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n>0$.
4) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.
5) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $nI_n=(n-1)I_{n-2}$ (utiliser une intégration par parties).
6) Montrer que la suite $\left((n+1)I_{n+1}I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (donner sa valeur).
7) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{2n}=\frac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)a_n}$.
8) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $1\leq\frac{I_{n-1}}{I_n}\leq\frac{I_{n-2}}{I_n}$.

   b) Calculer la limite des suites de terme général : $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ et nI_n^2.

   c) Donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

9) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \le a_n \le \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

b) En déduire que le terme a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ quand n tend vers +∞.

c) Donner la nature des séries de terme général :

i) a_n ii) $\dfrac{a_n}{4n+1}$ iii) $(-1)^n a_n$ iv) $\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$

Partie III : Etude de F.

On note (C) la courbe représentative de F dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé du plan.

1) Etude globale de F :
   a) Montrer que F est de classe C^∞ sur ℝ.
   b) Donner le sens de variation de F sur ℝ.
   c) Montrer que F est impaire.
   d) Montrer que pour tout $x \ge 1$, $F(x) - F(1) \le 1 - \dfrac{1}{x}$.
   e) Enoncer le théorème concernant l'existence de la limite en +∞ d'une fonction croissante définie sur [A,+ ∞[(où A∈ℝ).
   f) Déduire des 2 questions précédentes que F a une limite finie en +∞.

2) Etude locale de F :
   a) Donner le développement limité de F en 0 à l'ordre 9. Enoncer le théorème utilisé.
   b) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.
   c) La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.

3) Lien avec α :
   a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   b) En déduire que la limite de F en +∞ est égale à $2F(1)$.
   c) En utilisant la partie I)3), montrer que la limite de F en +∞ est α et retrouver le résultat de III)3)b).

4) Tracé de (C) :
   a) Dresser le tableau de variations de F.
   b) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
   c) Tracer (C) en tenant compte des différents points de l'étude précédente. Pour le tracé, prendre $\alpha \approx 1.85$.

5) Quelques applications de F :
   a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1+t^4)y' + 2t^3 y = 1$.
   b) On considère la courbe paramétrée : $(\Gamma)\ \begin{cases} x(t) = F(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$.
      i) Montrer que l'étude de (Γ) peut être restreinte à]0,+∞[. Préciser alors les symétries de (Γ).
      ii) Dresser le tableau de variations de (Γ).
      iii) Déterminer de manière précise le comportement de (Γ) quand t tend vers +∞.
      iv) Tracer la courbe (Γ).

c) On considère la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 F(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{cases}$.

i) Montrer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les trois inégalités suivantes :

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad 0 \leq f(xy) \leq 1 \qquad |F(xy)| \leq |xy|$$

ii) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Calculer pour $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$.

iv) φ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Partie IV : Développement en série entière de F et utilisation.

On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$, on note $h(x)$ sa somme.

On rappelle le résultat de la question II)9)b) : a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

1) Etude de h :
   a) Donner le rayon de convergence de la série entière définissant h.
   b) Montrer que $h(1)$ et $h(-1)$ existent.
   c) Enoncer le théorème de continuité de la somme d'une série entière de rayon R>0 sur le segment [0,R] et en déduire que h est continue sur [-1,1].
   d) i) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ est normalement convergente sur [-1,1].
   ii) Retrouver le résultat de IV)1)c). Enoncer le théorème utilisé.

2) Développement en série entière de F :
   a) Rappeler, si $\beta \in \mathbb{R}$, le développement en série entière de la fonction b définie par $b(x) = (1+x)^\beta$. Sur quel intervalle ce développement est-il valable ?
   b) En déduire que f puis F sont développables en série entière au voisinage de 0 et préciser leur développement en série entière.
   c) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$: $F(x) = h(x)$ (on pourra utiliser IV)1)c)).
   d) En déduire que $\alpha = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

3) Valeur approchée de α :
   Dans cette question, si $p \in \mathbb{N}$, S_p désigne la p$^{\text{ième}}$ somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ soit $S_p = \sum_{n=0}^{p} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.
   a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leq \dfrac{2}{4p+5} a_{p+1}$.
   b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{(p+1)^{3/2}}$ (utiliser II)9)a)).
   c) En déduire un entier p tel que $2S_p$ soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.