Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le sujet comporte des questions préliminaires et un problème de quatre parties numérotées **A**, **B**, **C** *et* **D**. *Les parties* **B** *et* **C** *du problème sont indépendantes de la partie* **A**.

L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$.

Soit n un entier strictement supérieur à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M. On note χ_M le polynôme caratéristique de la matrice M défini par $\chi_M(X) = \det(M - X\,I_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note ω le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Autant que possible, on préférera écrire ω plutôt que $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Questions préliminaires d'application directe du cours.

Les résultats de ces questions seront utilisés dans les parties **B** *et* **C** *du problème.*

1) a) Expliciter, sans justification, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité à l'aide de ω.

b) Factoriser, sans justification, le polynôme $X^n - 1$ comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

c) Soit $r \in \mathbb{Z}$. Montrer que, selon la valeur de r, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk}$ est égale, soit à 0, soit à n.

2) Soient M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes. Chaque valeur propre est écrite autant de fois que son ordre de multiplicité.

a) Démontrer que l'on a $\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k$.

b) Soient λ une valeur propre de M et V un vecteur propre associé. Montrer que pour tout entier naturel ℓ, le vecteur V est un vecteur propre de M^ℓ associé à la valeur propre λ^ℓ.

c) Montrer que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, la matrice $p(M)$ est diagonalisable.

d) Des questions précédentes, déduire que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\det(p(M)) = \prod_{k=0}^{n-1} p(\lambda_k).$$

Problème

A. **1)** Soit λ un réel strictement positif. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) du$$

après en avoir justifié l'existence.

2) Pour tous réels x et t, calculer le module $|1 - xe^{\mathrm{i}t}|$ du nombre complexe $1 - xe^{\mathrm{i}t}$.

3) Montrer que, si $x \in]-1,1[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) dt$ existe.

On note h la fonction de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) dt\,.$$

4) A l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction h est paire.

5) Montrer que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

6) Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$ et $x \neq 0$, on a les deux égalités

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x - \cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}\, dt &= \frac{2}{x+1} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 - \lambda}{(u^2+\lambda^2)(u^2+1)}\, du \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) du\end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda = \dfrac{1-x}{1+x}$.

On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

7) Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et donner, pour tout $x \in]-1,1[$, une expression de $h'(x)$ et de $h(x)$.

B. 1) Soit a un nombre complexe. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $A = (\gamma_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ a^{j-i} & \text{si } i < j \\ a^{n-(i-j)} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'on a $\det(A) = (1 - a^n)^{n-1}$.
On pourra utiliser les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - a^{j-1}C_1$ sur les colonnes pour j variant de 2 à n.

2) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_s)_{1 \leqslant s \leqslant n}$ une base de E. On définit l'endomorphisme u de E par

$$u(e_1) = e_n \quad \text{et} \quad u(e_s) = e_{s-1} \quad \text{si } 2 \leqslant s \leqslant n.$$

a) Ecrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que le polynôme caractéristique χ_U de U est donné par

$$\chi_U(X) = (-1)^n(X^n - 1).$$

c) Préciser les valeurs propres de U. La matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

3) Soit le n-uplet $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On lui associe la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$C_\alpha = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & & \alpha_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Ses coefficients sont précisément définis par $c_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ \alpha_{n-(i-j)} & \text{si } i > j \end{cases}$.

On admettra que l'on a $C_\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k$.

Montrer que C_α est diagonalisable.

4) Montrer que les valeurs propres de C_α sont les nombres complexes $q(\omega^\ell)$ où $q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ et $\ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

C. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la matrice $\Gamma_\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Gamma_\varphi = C_\alpha$ où $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ avec

$$\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks} \quad \text{pour } k \in \{0,1,\ldots,n-1\}.$$

1) a) Vérifier que les valeurs propres de Γ_φ sont les

$$\lambda_\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks}\right)\omega^{k\ell} \quad \text{où} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant n-1.$$

b) En déduire, en utilisant la question **1)c)** des questions préliminaires, que, pour tout entier $\ell \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, on a $\lambda_\ell = \varphi\left(\dfrac{2\ell\pi}{n}\right)$.

c) Montrer que l'on a $\det(\Gamma_\varphi) = \displaystyle\prod_{\ell=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right)$.

2) Dans cette question, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1-a^n}{1-a\,e^{it}}$ où $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$.

a) Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que l'on a $\varphi\left(\dfrac{2s\pi}{n}\right) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} a^\ell \omega^{s\ell}$.

c) Démontrer, qu'alors, Γ_φ est égale à la matrice A de la question **B.1)**.

D. 1) Soit F une fonction continue sur $[0, 2\pi]$. Justifier l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} F\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\,dt.$$

2) Dans cette question, on considère que a est réel tel que $|a| < 1$ et on pose

$$F(t) = \ln\left(\left|\frac{1}{1-a\,e^{it}}\right|\right).$$

a) Vérifier que la fonction F est définie et continue sur $[0, 2\pi]$.

b) A l'aide de la partie **C**, montrer que, pour tout $a \in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(\left|\frac{1}{1-a\,e^{it}}\right|\right) dt = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{(\det(A))^{\frac{1}{n}}}{(1-a^n)}\right)$$

où A est la matrice de la question **B.1)**.

c) Retrouver alors l'expression de $h(x)$ obtenue à la question **A.7)**.